

Turbulence d'ondes dans des modèles unidimensionnels

Philippe GUYENNE^a, Vladimir ZAKHAROV^{b,c}, Andrei PUSHKAREV^{b,c}, Frédéric DIAS^d

^a Institut non linéaire de Nice, 1361, route des Lucioles, 06560 Sophia Antipolis, France

^b Landau Institute for Theoretical Physics, Moscow, Russia

^c Department of Mathematics, University of Arizona, USA

^d Centre de mathématiques et de leurs applications, École normale supérieure, 61, avenue du Président-Wilson, 94235 Cachan cedex, France
Courriel : dias@cmla.ens-cachan.fr

(Reçu le 30 juin 2000, accepté le 25 juillet 2000)

Résumé.

Dans cette note, nous évaluons la validité de la théorie de la turbulence faible par l'étude numérique d'une équation non-linéaire d'ondes dispersives à trois paramètres. Les solutions prédites en loi d'échelle sont déterminées explicitement puis comparées aux résultats numériques. Quelque soit le signe de la non linéarité, nous montrons que le régime de turbulence faible est fortement influencé par la présence de structures cohérentes. Ce sont d'une part les collapses et d'autre part les quasi-solitons. © 2000 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

turbulence faible / ondes dispersives / collapse / solitons / systèmes hamiltoniens

Wave turbulence in one-dimensional models

Abstract.

In this note, we assess the validity of weak turbulence theory by numerically investigating a three-parameter nonlinear dispersive wave equation. The predicted power-law solutions are explicitly determined and then compared with the numerical results. For both signs of nonlinearity, we show that the weakly turbulent regime is strongly influenced by the presence of coherent structures. These are wave collapses and quasisolitons. © 2000 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

weak turbulence / dispersive waves / collapse / solitons / hamiltonian systems

Abridged English version

The validity of weak turbulence theory, developed by Zakharov [1], is assessed by numerically studying the three-parameter nonlinear dispersive equation (1) proposed by Majda et al. [2]. The parameters α and β measure, respectively, dispersion and nonlinearity. The third parameter λ , which is equal to ± 1 , governs the balance between dispersive and nonlinear effects. One can use the terminology *focusing* for $\lambda = -1$ and *defocusing* for $\lambda = 1$. Computations for $\alpha = 1/2$ are presented. In that case, which mimics gravity waves, the dominant interactions occur between four waves. Computations for similar parameter values were recently performed by Cai et al. [3].

For a weak nonlinearity, Zakharov's theory [4] leads to a kinetic equation for the two-point correlation function n_k . Its stationary Kolmogorov-type solutions are given by equation (2). These solutions do not

Note présentée par Yves MEYER.

depend on the sign of nonlinearity λ . Computations are performed in the range $\beta > -1/2$, which leads to a particle flux Q towards large scales ($Q < 0$) and an energy flux P towards small scales ($P > 0$) [5].

The numerical results show that the weakly turbulent regime is strongly influenced by the presence of coherent structures. These are solitons, quasisolitons or collapses. The existence of solitons depends on the parameter λ . Looking for soliton solutions of (1) of the form $\hat{\psi}_k(t) = e^{i(\Omega - kV)t} \hat{\phi}_k$ leads to equation (3). The condition $\Omega - kV + |k|^\alpha \neq 0$ implies that the propagating speed V is zero. Moreover, solitons can exist only if $\lambda = -1$, and a stability analysis shows that they are unstable in the regime of interest [6].

In view of this result, it is natural to look at the formation of collapses. They are described by self-similar solutions of the form $\hat{\psi}_k(t) = (t_0 - t)^{p+i\epsilon} \chi(\xi)$ where $\xi = k(t_0 - t)^{1/\alpha}$ and $p = (\beta - \alpha + 2)/2\alpha$. An analysis of the convergence of the integrals involved shows that necessary conditions for collapses to exist when $\alpha = 1/2$ are $\beta > -1/2$ for $\lambda = -1$, which coincides with the soliton instability criterion, and $\beta > 0$ for $\lambda = +1$. In spectral space, the self-similar solution behaves like $|\hat{\psi}_k|^2 \simeq k^{-\beta+\alpha-2}$ at $t = t_0$, which is analogous to Phillips spectrum for deep water gravity waves [7].

In the case $\lambda = +1$, quasisolitons can exist. These are approximate solutions of equation (1) which look like envelope solitons. In the limit of a narrow spectrum centered at, say, k_m , these quasisolitons are given by $\psi(x, t) \simeq \phi(x - Vt) e^{i\Omega t + ik_m(x - Vt)}$ with ϕ , Ω and V given by equations (4) and (5). When κ/k_m is small, the quasisolitons look almost like true solitons and can persist for a long time. They can play an important role in weak turbulence. When κ/k_m is large, the quasisolitons can become unstable.

The numerical computations are performed by adding a source term as well as a damping term to equation (1), at small and large scales. A pseudospectral code is used to integrate equation (1). The study is restricted to the direct cascade. Spectra are shown in figures 1a and 1b. The results depend on the value of λ . In the focusing case, the slope is -1 as predicted, but the level of n_k is one order of magnitude less. The turbulence is a mixture of Kolmogorov regime and collapses. The evolution towards collapse is shown in figure 2a. In the defocusing case, the slope is larger than predicted. This disagreement might be explained by the presence of quasisolitons, shown in figure 2b. The Kolmogorov constant a_2 and the energy flux P in equation (2) are computed as in [8].

In conclusion, the numerical results show two types of localised coherent structures: collapses in the focusing case ($\lambda = -1$) and quasisolitons in the defocusing case ($\lambda = +1$). Their role in the statistical properties of the system can be seen in the spectra. It leads to a discrepancy between numerics and theory. The fact that weak turbulence is not reached may be due to the sparsity of resonances in one dimension and to the numerical discretization. Four-wave interactions are not as efficient, while localised structures become dominant. Therefore equation (1) is not such a good model to assess the validity of weak turbulence theory.

1. Introduction

La théorie de la turbulence faible développée par Zakharov [1] permet de prédire la forme des spectres en fréquence dans les problèmes d'ondes dispersives faiblement non linéaires. Elle trouve des applications dans une grande variété de domaines physiques allant des vagues à la surface de la mer jusqu'aux ondes ions-acoustiques dans les plasmas. Elle repose sur une formulation hamiltonienne du problème où seules les interactions résonantes entre ondes de faible amplitude sont prises en compte. Il est alors possible d'établir des équations approchées en effectuant un développement en puissance du paramètre de non linéarité. Bien que la théorie existe déjà depuis une trentaine d'années, peu de preuves aussi bien expérimentales que numériques ont été fournies pour vérifier sa validité. Notre étude consiste à intégrer numériquement une équation modèle en une dimension d'espace puis à confronter les solutions obtenues avec celles calculées selon la théorie.

2. Équation modèle

On considère une équation modèle proposée par Majda et al. [2] qui est une version simplifiée de l'équation de Zakharov en une dimension. Dans l'espace de Fourier, elle s'écrit :

$$i \frac{\partial \widehat{\psi}_k}{\partial t} = \omega_k \widehat{\psi}_k + \int T_{123k} \widehat{\psi}_1 \widehat{\psi}_2 \widehat{\psi}_3^* \delta(k_1 + k_2 - k_3 - k) dk_1 dk_2 dk_3 \quad (1)$$

où $\widehat{\psi}_k$ désigne l'amplitude de Fourier relative au champ d'ondes complexe $\psi(x, t)$. La quantité $\omega_k = |k|^\alpha$ représente la fréquence linéaire et $T_{123k} = \lambda |k_1 k_2 k_3 k|^{\beta/4}$ le coefficient d'interaction. L'équilibre entre les effets non-linéaires et dispersifs est paramétré par le facteur $\lambda = \pm 1$. Le système possède deux principales constantes du mouvement qui sont l'Hamiltonien :

$$H = \int \omega_k |\widehat{\psi}_k|^2 dk + \frac{1}{2} \int T_{123k} \widehat{\psi}_1 \widehat{\psi}_2 \widehat{\psi}_3^* \widehat{\psi}_k^* \delta(k_1 + k_2 - k_3 - k) dk_1 dk_2 dk_3 dk$$

et le nombre de particules $N = \int |\widehat{\psi}_k|^2 dk$. On fixe $\alpha = 1/2$ par analogie avec les ondes de gravité à la surface de l'eau dont la relation de dispersion est $\omega_k = (gk)^{1/2}$ (g étant l'accélération due à la gravité). Ce choix permet de négliger les résonances entre trois ondes. On ne s'intéresse donc qu'aux interactions résonantes entre quatre ondes qui sont dominantes lorsque $\alpha < 1$. Cai et al. [3] ont également mené une étude numérique sur ce modèle.

3. Spectres du type Kolmogorov

Dans le cadre d'une faible non-linéarité, la théorie de Zakharov [4] conduit à l'écriture d'une équation cinétique pour la fonction de corrélation à deux points $n_k = \langle |\widehat{\psi}_k|^2 \rangle$ à partir de (1). La validité de l'équation cinétique repose sur les hypothèses de champ quasi-gaussien et de phases aléatoires. On peut déterminer explicitement ses solutions stationnaires du type Kolmogorov :

$$n_k = a_1 |Q|^{1/3} k^{-2\beta/3 - 1 + \alpha/3} \quad \text{et} \quad n_k = a_2 |P|^{1/3} k^{-2\beta/3 - 1} \quad (2)$$

qui sont associées respectivement à un flux de particules Q et un flux d'énergie P . Les coefficients a_1 et a_2 désignent les constantes de Kolmogorov sans dimension. Il est important de souligner que la théorie prédit les lois d'échelle (2) indépendamment du signe de λ . En outre, une analyse similaire à celle de Dyachenko et al. [5] montre que, dans la riche famille de solutions (2), seuls les cas $\beta < -3/2$ et $\beta > 2\alpha - 3/2$, c'est-à-dire $\beta < -3/2$ et $\beta > -1/2$ si $\alpha = 1/2$, sont susceptibles de se réaliser car ils correspondent à un flux de particules vers les grandes échelles ($Q < 0$) et un flux d'énergie vers les petites échelles ($P > 0$). On ne considère ici que la gamme $\beta > -1/2$ qui inclut la non-linéarité cubique simple ($\beta = 0$) et l'exposant d'échelle reproduisant le coefficient d'interaction pour les ondes de gravité ($\beta = +3$).

4. Solitons, collapses et quasi-solitons

Les solitons sont souvent importants dans l'étude de systèmes non-linéaires hamiltoniens tels que l'équation de Schrödinger non-linéaire. Dans le modèle (1), leur existence et leur rôle dépendent étroitement du paramètre λ . Si l'on cherche des solitons de la forme $\widehat{\psi}_k(t) = e^{i(\Omega - kV)t} \widehat{\phi}_k$ avec Ω et V constants, l'équation (1) devient :

$$\widehat{\phi}_k = - \frac{1}{\Omega - kV + \omega_k} \int T_{123k} \widehat{\phi}_1 \widehat{\phi}_2 \widehat{\phi}_3^* \delta(k_1 + k_2 - k_3 - k) dk_1 dk_2 dk_3 \quad (3)$$

Pour tout k réel et $\alpha < 1$, la condition $\Omega - kV + |k|^\alpha \neq 0$ implique que la vitesse de propagation V soit nulle. En exprimant l'équation (3) sous la forme variationnelle $\delta(H + \Omega N) = 0$, on en conclut que ces solitons « statiques » n'existent que dans le cas $\lambda = -1$ où l'équilibre entre les effets non-linéaires et dispersifs est possible. Comme pour l'équation de Schrödinger non-linéaire [6], le critère de stabilité linéaire des solitons est donné par $\partial N / \partial \Omega > 0$. Cela équivaut à $\beta < \alpha - 1$ c'est-à-dire $\beta < -1/2$ si $\alpha = 1/2$. Par conséquent, les solitons sont instables dans le régime qui nous intéresse.

Ce résultat conduit à examiner la formation des collapsés ou singularités au bout d'un temps fini. Elles peuvent être décrites par les expressions auto-similaires $\hat{\psi}_k(t) = (t_0 - t)^{p+i\epsilon} \chi(\xi)$ où t_0 désigne le temps d'événement de la singularité, ϵ une constante arbitraire, $\xi = k(t_0 - t)^{1/\alpha}$ et $p = (\beta - \alpha + 2)/2\alpha$. En substituant dans les formules de N et H , on trouve pour $\lambda = -1$ que $N < +\infty$ et $H < +\infty$ quand $t \rightarrow t_0$ si $\beta > \alpha - 1$ c'est-à-dire $\beta > -1/2$ avec $\alpha = 1/2$. Cela coïncide exactement avec le critère d'instabilité des solitons mentionné ci-dessus. Pour $\lambda = +1$, la condition devient $\beta > 2\alpha - 1$ c'est-à-dire $\beta > 0$ avec $\alpha = 1/2$. Dans l'espace spectral, la solution singulière se comporte à $t = t_0$ comme $|\hat{\psi}_k|^2 \simeq k^{-\beta+\alpha-2}$, ce qui est analogue au spectre de Phillips [7] pour les ondes de gravité en eau profonde.

A défaut de solitons, les quasi-solitons peuvent exister dans le cas $\lambda = +1$. Ce sont des solutions approchées de l'équation (1) qui s'identifient à des solitons d'enveloppe. Dans la limite d'un spectre de largeur étroite centré autour d'un certain mode k_m , on obtient l'équation de Schrödinger non-linéaire focalisante et la forme explicite des quasi-solitons s'écrit $\psi(x, t) \simeq \phi(x - Vt)e^{i\Omega t + ik_m(x - Vt)}$ avec :

$$\phi(\xi) = \sqrt{\frac{\alpha(1-\alpha)}{k_m^{\beta-\alpha+2}}} \frac{\kappa}{\cosh(\kappa\xi)}, \quad \kappa = |k - k_m| \ll k_m \quad (4)$$

$$\Omega = -(1-\alpha)k_m^\alpha - \frac{1}{2}\alpha(1-\alpha)k_m^{\alpha-2}\kappa^2, \quad V = \alpha k_m^{\alpha-1} \quad (5)$$

tels que $\Omega - k_m V + k_m^\alpha \neq 0$. Plus le paramètre κ/k_m est petit, plus les quasi-solitons s'apparentent aux vrais solitons. Ils persistent alors sur un temps long et sont susceptibles de jouer un rôle important dans la turbulence faible. Par contre, pour de grandes valeurs de κ/k_m , les quasi-solitons peuvent se déstabiliser en collapsés lorsque $\beta > 2\alpha - 1$.

5. Résultats numériques

Pour l'étude de la turbulence, on doit ajouter dans le second membre de (1) un terme de forçage et un terme de dissipation agissant aussi bien aux grandes qu'aux petites échelles. Un code pseudospectral standard est utilisé pour résoudre numériquement le modèle complet.

On se restreint ici à l'étude de la cascade directe où la loi est en principe déterminée par le flux d'énergie P vers les petites échelles. Les figures 1a et 1b représentent les spectres stationnaires et isotropes n_k pour les cas $\beta = 0$ et $\lambda = \pm 1$. Les résultats numériques sont différents selon la valeur de λ . Pour $\lambda = -1$, la solution se comporte bien en k^{-1} comme prédit par la théorie mais son niveau apparaît pratiquement d'un ordre de grandeur moins élevé. Dans cette situation, la turbulence est un mélange de régimes du type Kolmogorov et de collapsés. Une structure évoluant vers le collapsé est illustrée sur la figure 2a. Pour $\lambda = +1$, le spectre se confond presque avec la loi théorique lorsqu'on est proche de la zone de forçage mais il décroît plus rapidement dans la région des grands nombres d'onde. La pente s'ajuste alors bien à la solution $k^{-5/4}$ établie de façon heuristique par Majda et al. [2]. Ce désaccord peut s'expliquer par l'influence des quasi-solitons dont la présence est mise en évidence sur la figure 2b. Comme Pushkarev et Zakharov [8], on calcule numériquement la constante de Kolmogorov a_2 et le flux d'énergie P .

6. Conclusions

Nos simulations numériques révèlent deux types de structures cohérentes localisées : les collapsés dans le cas focalisant ($\lambda = -1$) et les quasi-solitons dans le cas défocalisant ($\lambda = +1$). Leur action sur les propriétés statistiques du système est observée sur les spectres. Elle se traduit par un écart entre les résultats

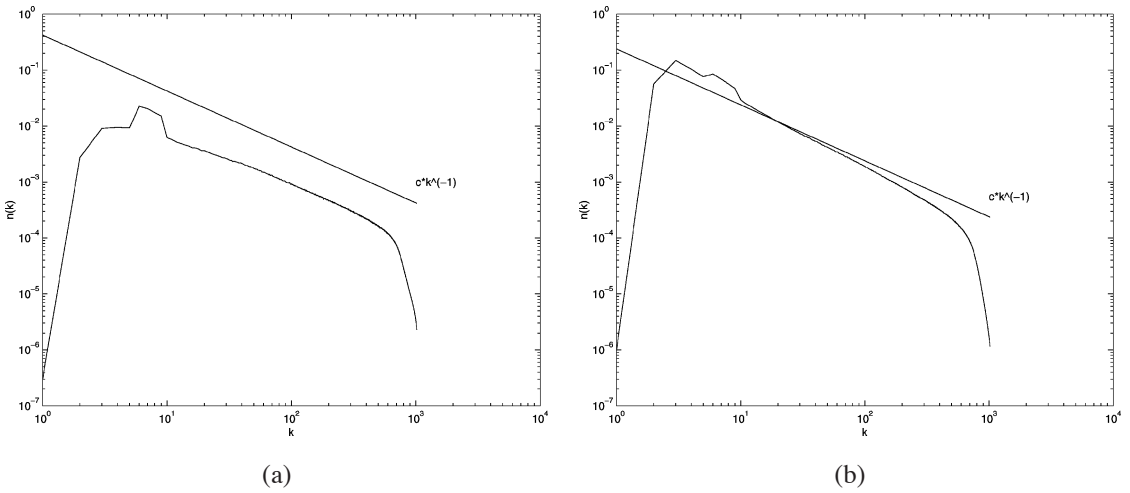


Figure 1. $\beta = 0$. (a) $\lambda = -1$; (b) $\lambda = +1$. Spectres stationnaires et isotropes n_k en fonction du nombre d'onde. On compare le spectre calculé numériquement et celui de Kolmogorov prédit par la théorie $n_k = ck^{-1}$ avec $c = a_2P^{1/3}$ (ligne droite).

Figure 1. $\beta = 0$. (a) $\lambda = -1$; (b) $\lambda = +1$. Stationary and isotropic spectra n_k vs. wavenumber. We compare the computed spectrum with the predicted one of Kolmogorov type $n_k = ck^{-1}$ with $c = a_2P^{1/3}$ (straight line).

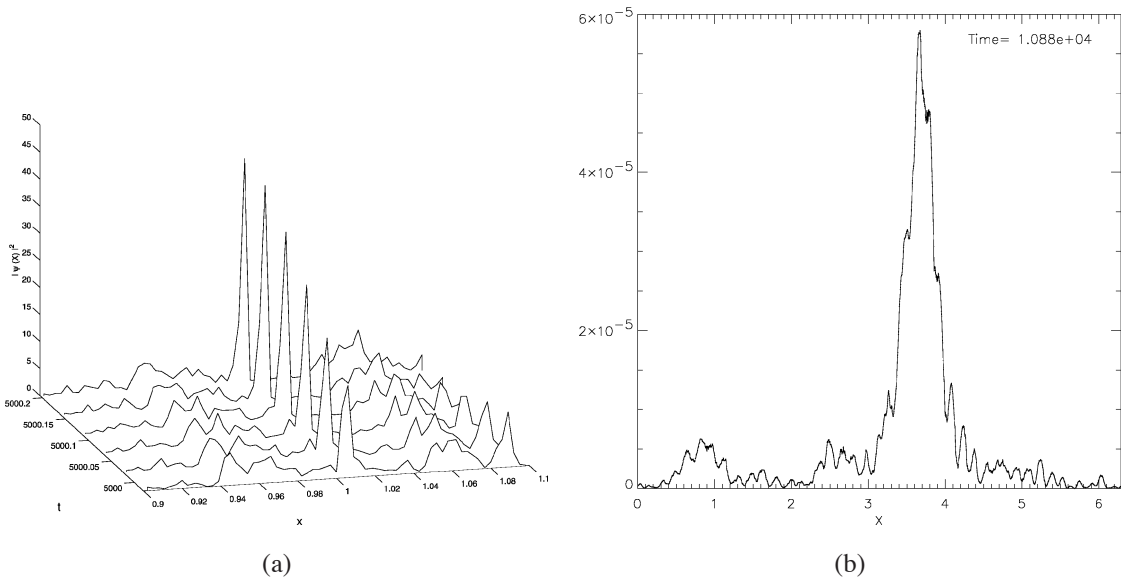


Figure 2. (a) $\beta = 0$, $\lambda = -1$. Evolution vers le collapse en $x \simeq 1$ entre $t = 4999,980$ et $t = 5000,205$; (b) $\beta = +3$, $\lambda = +1$. Cliché d'un quasi-soliton en $x \simeq 3,7$ à $t = 10880$.

Figure 2. (a) $\beta = 0$, $\lambda = -1$. Evolution towards collapse at $x \simeq 1$ between $t = 4999.980$ and $t = 5000.205$; (b) $\beta = +3$, $\lambda = +1$. Snapshot of a quasisoliton at $x \simeq 3.7$ and $t = 10880$.

numériques et les prédictions théoriques. La réalisation imparfaite du régime faiblement turbulent peut être attribuée à la faible densité des résonances due à l'unidimensionnalité du problème avec $\alpha = 1/2$ et à la

discrétisation dans la résolution numérique. Les interactions résonantes entre quatre ondes perdent alors leur efficacité au profit des structures cohérentes. En ce sens, l'équation (1) ne constitue pas un modèle idéal pour vérifier la théorie.

Références bibliographiques

- [1] Zakharov V.E., Stability of periodic waves of finite amplitude on the surface of deep fluid, *J. Appl. Mech. Tech. Phys.* 2 (1968) 190–194.
- [2] Majda A.J., McLaughlin D.W., Tabak E.G., A one-dimensional model for dispersive wave turbulence, *J. Nonlinear Sci.* 6 (1997) 9–44.
- [3] Cai D., Majda A.J., McLaughlin D.W., Tabak E.G., Spectral bifurcations in dispersive wave turbulence, *Proc. Nat. Acad. Sci.* 96 (1999) 14216–14221.
- [4] Zakharov V.E., L'vov V.S., Falkovich G., *Kolmogorov Spectra of Turbulence I*, Springer-Verlag, 1992.
- [5] Dyachenko S., Newell A.C., Pushkarev A., Zakharov V.E., Optical turbulence : weak turbulence, condensates and collapsing filaments in the nonlinear Schrödinger equation, *Physica D* 57 (1992) 96–160.
- [6] Kuznetsov E.A., Rubenchik A.M., Zakharov V.E., Soliton stability in plasmas and hydrodynamics, *Phys. Rep.* 142 (1986) 103–165.
- [7] Phillips O.M., *The Dynamics of The Upper Ocean*, Cambridge Univ. Press, 1977.
- [8] Pushkarev A.N., Zakharov V.E., Turbulence of capillary waves, *Phys. Rev. Lett.* 76 (1996) 3320–3323.